RÉDUIRE LES EFFETS DE CONTENUS EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES POUR FAVORISER LA CONSTRUCTION D'UNE REPRÉSENTATION ALTERNATIVE

Sylvie Gamo
Université du Luxembourg, Grand-Duché du Luxembourg

Sandra Nogry
Université Cergy-Pontoise et Université Paris VIII

Emmanuel Sander
Université Paris VIII

Mots Clés : Résolution de problèmes arithmétiques complexes - Effets de contenu – Stratégies – Apprentissage - Transfert analogique - Flexibilité cognitive.

Résumé : En résolution de problèmes, différentes études ont montré que le contenu d'un énoncé ne fait pas qu'habiller une certaine structure mathématique mais que des processus interprétatifs interviennent à partir de ce contenu et participent à la construction de la représentation de la structure du problème. La première partie de cet article propose une synthèse des travaux montrant que le contenu de l'énoncé influence la mise en œuvre de la stratégie de résolution et la performance. La seconde partie présente une démarche d'apprentissage qui vise à rendre l'apprenant moins dépendant du contenu de l'énoncé en le conduisant à remettre en cause la représentation spontanée du problème. L'apprenant est ainsi amené d'une part, à développer sa capacité à changer de point de vue, c'est-à-dire, à développer une flexibilité cognitive plus grande et d'autre part à traiter les problèmes de plus en plus abstraitement. Cette démarche d'apprentissage a été menée auprès d'élèves de Grade 4 (9/10 ans) et de Grade 5 (10/11 ans) de l'école primaire scolarisés en classes ordinaires (Gamo, Sander et Richard, 2010) et en réseau d'éducation prioritaire (Gamo, Nogry et Sander, 2014). Les résultats des recherches pour évaluer l'efficacité de cette démarche sont présentés. Les implications de ces résultats pour les apprentissages scolaires sont discutées.

Introduction

En résolution de problèmes arithmétiques, depuis plusieurs décennies, un ensemble de recherches a mis en évidence que le contenu de l'énoncé, tel la catégorie sémantique à laquelle le problème appartient, a des effets sur le niveau de difficulté des problèmes (Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Vergnaud, 1982). Plus récemment, différentes études ont montré que le contenu d'un énoncé ne fait pas qu'habiller une certaine structure mathématique mais que des processus interprétatifs interviennent à partir de ce contenu et participent à la construction de la représentation de la structure du problème. Cette représentation - induite par les connaissances sur le monde plus que par des connaissances mathématiques - n'est pas toujours compatible avec la structure mathématique du problème. Elle est à l'origine d'importantes difficultés scolaires chez l'enfant et chez les adultes (Novick & Bassok, 2005, pour une revue).

Dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques complexes, étudiés à l'école élémentaire, certaines études ont montré qu'à l'intérieur d'une même catégorie de problèmes, les connaissances du sujet associées à la situation décrite dans l'énoncé interviennent dans l'élaboration de la représentation de problèmes (Coquin-Viennot & Moreau, 2003 ; Thevenot & Oakhill, 2008 ; Gamo, Taabane & Sander, 2011) ; ce phénomène est nommé « effet de contenu » (Gamo *et al.,* 2011 ; Richard & Sander, 2000). Ces travaux ont des implications importantes pour les apprentissages arithmétiques à l'école : ils peuvent à la fois permettre d'expliquer la difficulté des différents problèmes présentés, la mise en œuvre de la stratégie de résolution du problème et le transfert entre problèmes isomorphes (c'est-à-dire entre problèmes de même structure mathématique). En effet, certains contenus peuvent « masquer » la structure mathématique du problème et ainsi induire la mise en œuvre de stratégies spécifiques et influer sur les performances des élèves. La recherche réalisée par Gamo *et al.* (2011) portant sur des problèmes arithmétiques admettant deux stratégies de résolution alternatives a montré que la variable impliquée dans ces problèmes (effectif, prix, âge, durée…) détermine la mise en œuvre d'une stratégie particulière et masque la possibilité d'en percevoir d'autres.

Mais, comment amener les élèves à être moins dépendants de ces effets de contenus de l'énoncé? Comment amener les élèves à développer leur flexibilité cognitive, c'est-à-dire leur capacité à changer de point de vue sur les problèmes qui leur sont proposés, puis à traiter les problèmes de plus en plus abstraitement ?

L'étude présentée ici a pour objectif de montrer l'efficacité d'une démarche d'apprentissage cherchant à provoquer chez l'élève un changement de représentation mentale en manipulant les dimensions sémantiques des problèmes. Cette démarche a été testée en classe ordinaire (Gamo, Sander & Richard, 2010) et en réseau d'éducation prioritaire (Gamo, Nogry & Sander, 2014). Fondée sur la comparaison des problèmes et des stratégies, cette dernière a été développée pour favoriser la construction d'une représentation alternative du problème, un changement de point de vue sur le problème. Elle vise à abstraire la structure de résolution et à conduire les élèves à reconnaître que différentes représentations du problème peuvent être construites et qu'elles sont équivalentes.

Cet article propose une synthèse de différents travaux que nous avons conduits sur l'influence du contenu de l'énoncé sur la résolution de problèmes arithmétiques à l'école primaire ainsi qu'une présentation de la démarche d'apprentissage proposée aux élèves. Les résultats des recherches menées pour évaluer l'efficacité de cette démarche sont ensuite présentés. Enfin, les implications de ces résultats pour les apprentissages scolaires sont discutées.

1. Influence du contenu de l'énoncé sur la construction et la structuration de la représentation

Les travaux présentés dans cette partie mettent en évidence la façon dont les contenus des énoncés favorisent une certaine interprétation de la structure du problème.

Dans le champ des recherches sur l'analogie, Bassok et ses collaborateurs ont étudié l'influence de certains aspects de la situation sur la construction de la représentation en résolution de problèmes. Bassok et Olseth (1995) proposent une « hypothèse interprétative » selon laquelle les individus se construiraient une interprétation de la structure d'un problème en se fondant sur les connaissances qu'ils possèdent sur les objets de la situation décrite dans l'énoncé. La représentation de la structure ainsi construite est nommée la « structure induite », elle peut être plus ou moins compatible avec la structure mathématique du problème. Cette notion de structure induite a été mise en évidence à partir deux axes de recherche l'un rendant compte des asymétries de transfert entre problèmes isomorphes et le second qui est le domaine qui nous intéresse principalement dans cet article concernant la sélection de stratégies de résolution de problèmes.

Notamment, Bassok, Chase et Martin (1998) ont demandé à des étudiants de construire un énoncé de problèmes contenant tous des objets imposés (par exemples, des fruits, des fleurs, des récipients…). La moitié des participants devait produire des problèmes pouvant se résoudre par une addition, opération symétrique, et l'autre moitié devait produire des problèmes pouvant se résoudre par une division, opération asymétrique. Les objets qu'ils devaient utiliser étaient des objets compatibles ou incompatibles sémantiquement compatibles avec l'opération (Exemples d'objets compatibles : - pommes/ poires appartenant à la même catégorie sémantique donc liés par une relation symétrique, relation compatible avec l'addition ; - pommes/ paniers liés par une relation fonctionnelle donc asymétrique, compatible avec la division. Exemples d'objets incompatibles : - pommes/ paniers pour l'addition, pommes/ poires pour la division). Les résultats montrent que 32 % des problèmes construits pour des paires d'objets incompatibles avec la structure de l'opération sont soit - des problèmes plus complexes mais respectant la relation sémantique des objets (exemple : la consigne demandant à produire un énoncé de problème de division avec la paire symétrique tulipes-jonquilles a amené un étudiant à proposer : « *Wilma a planté 250 tulipes et 250 jonquilles et cela a pris 20 jours pour les planter. Combien de fleurs a-t-elle plantées chaque jour ?* ».) , soit des problèmes utilisant, malgré la consigne, l'autre opération. Les auteurs en ont conclu que la nature symétrique ou asymétrique de la relation sémantique liant les objets induit une structure mathématique possédant la même propriété ; cette dernière étant mise en évidence par l'utilisation d'une stratégie de résolution de même type. Ce processus est nommé processus d'alignement par les auteurs. Afin de mesurer l'effet d'un tel alignement, Martin et Bassok (2005) ont demandé à des lycéens et étudiants de résoudre ces deux problèmes : « *Dans une université, il y a 3450 étudiants. Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs. Combien de professeur y a-t-il ?* » et « *Durant une soirée au restaurant de Mindy, 72 personnes ont commandé une tarte. Quatre fois plus de personnes ont commandé une tarte qu'un brownie. Combien de personnes ont commandé un brownie ?* ». Les résultats montrent que le premier énoncé est mieux réussi que le second puisque le premier fournit des indices sémantiques compatibles avec l'opération attendue.

D'autres recherches ont porté sur l'étude des effets de contenu de l'énoncé sur la mise en œuvre d'une stratégie de résolution lorsque le problème en autorise plusieurs. En effet, les problèmes admettant plusieurs stratégies sont particulièrement adaptés pour étudier les effets du contenu de l'énoncé des problèmes sur la construction de la représentation du problème. L'analyse de la stratégie mise en œuvre permet d'inférer la représentation sous-jacente construite par l'élève. Les stratégies mises en œuvres sont induites par les connaissances sur le monde plus que par des connaissances mathématiques (Coquin-Viennot & Moreau, 2003 ; Gamo *et al.*, 2011 ; Hakem, Sander, Labat & Richard, 2005; Thevenot & Oakhill, 2008).

Notamment, Coquin-Viennot et Moreau (2003) ont étudié cette question pour les problèmes de distributivité. Ils ont demandé à des élèves de 8/ 9 ans (Grade 3) et de 10/ 11 ans (Grade 5) de résoudre des problèmes de distributivité. De tels problèmes se résolvent par une procédure de factorisation (k.(a + b)) ou par une procédure de développement (k.a + k.b). Les auteures ont montré que pour un problème comme « *Pour une distribution de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats 5 roses et 7 tulipes. Combien de fleurs le fleuriste utilise-t-il en tout ?* », la procédure privilégiée est le développement (14 × 5 + 14 × 7). En revanche, lorsqu'elles ajoutent le mot « bouquet »: « *Pour une distribution de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats un bouquet composé de 5 roses et 7 tulipes. Combien de fleurs le fleuriste utilise-t-il en tout ?* », le nombre de procédures par factorisation (14 × (5 + 7)) s'accroît au détriment du nombre de développement. Ces résultats indiquent selon nous que la présence d'un élément structurant (bouquet) conduit à considérer une catégorie générale (celle des fleurs) à laquelle la multiplication est appliquée, d'où une factorisation. En revanche, en l'absence de cet élément, chaque catégorie (rose, tulipe) est d'abord traitée isolément par la procédure de développement. Ainsi la présence d'un élément structurant semble être une autre manière d'induire une structure.

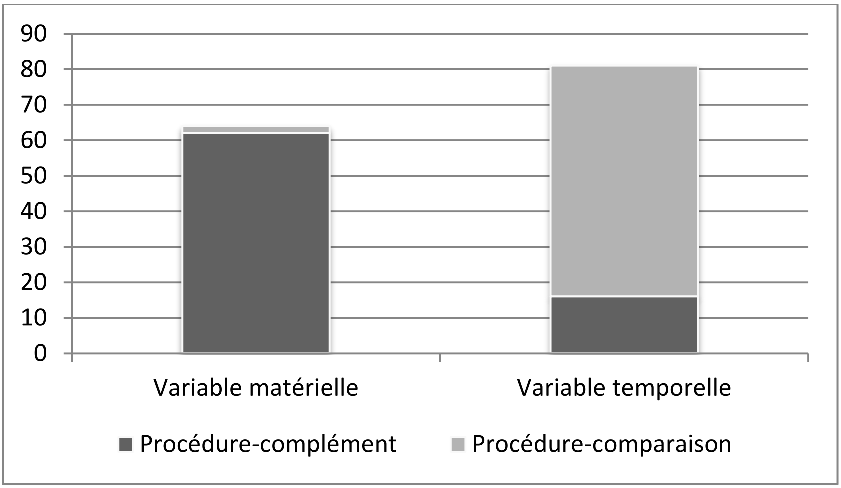
Un même phénomène est observé par Gamo et *al.* (2010 et 2011) en analysant les effets de contenu de l'énoncé de problèmes additifs à plusieurs stratégies sur leur résolution. Les problèmes expérimentaux sont de même structure mathématique et mettent en jeu des variables temporelles (exemple : Tableau 1, variable Âge), et des variables matérielles (exemple : Tableau 1, variable Prix). Ces problèmes admettent deux stratégies pour les solutionner : une procédure-complément, qui nécessite trois calculs, dans laquelle les calculs s'effectuent au fur et à mesure de la lecture (calculant d'abord la valeur de la partie intermédiaire, cherchant ainsi la valeur du complément) et une procédure-comparaison (reposant sur l'idée que la différence entre deux ensembles ayant une partie commune provient nécessairement de la différence entre les parties différentes) qui ne nécessite qu'une soustraction (Exemples : Tableau 1).

Tableau 1 : Exemple de deux problèmes et présentation des stratégies de réussite

Variable Prix Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros et une trousse. Il paie 14 Euros. Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur. Augustin achète une trousse et un feutre. Combien doit-il payer ?	**Variable Âge** Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans. Jean a commencé au même âge qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins. A quel âge Jean s'est-il arrêté ?
Procédure-complément Calcul du prix de la trousse (partie commune) par Inférence de complément 14 - 8 = 6 Calcul du prix du feutre par inférence de comparaison 8 - 3 = 5 Calcul de ce qu'a payé Augustin par inférence de complément 6 +5 = 11	**Procédure-complément** Calcul de l'âge d'Antoine quand il a commencé les cours (partie commune) par Inférence de complément 17 - 8 = 9 Calcul de la durée des cours pour Jean par inférence de comparaison 8 - 2 = 6 Calcul de l'âge de Jean quand il s'est arrêté par inférence de complément 9+6 = 15
Procédure-comparaison Calcul de ce qu'a payé Augustin par inférence de comparaison 14 - 3 = 11	**Procédure-comparaison** Calcul de l'âge de Jean quand il s'est arrêté par inférence de comparaison 17 - 2 = 15

La passation auprès d'élèves de 10/11ans donne lieu à des patterns de stratégies différents selon la nature de la variable (matérielle ou temporelle). La procédure-complément est davantage mise en œuvre pour les problèmes dont la variable mesure une quantité matérielle plutôt que pour celles mesurant une quantité temporelle et inversement la procédure-comparaison est davantage mise en œuvre pour les problèmes dont la variable mesure une quantité temporelle plutôt que pour celles mesurant une quantité matérielle. La figure 1 illustre ces patterns : bien que ces problèmes soient de structure mathématique identique, les élèves réussissent mieux celui sur les âges que celui sur les prix et la majeure partie d'entre eux résolvent avec la procédure-complément le problème sur les prix et avec la procédure-comparaison celui sur les âges.

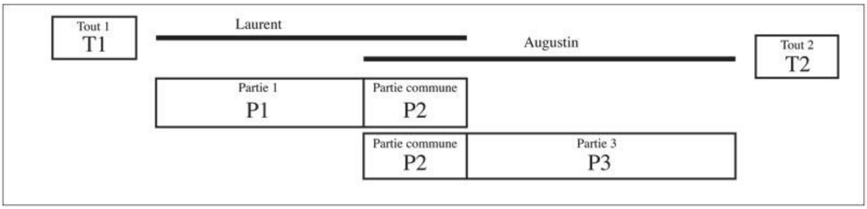
Figure 1 : Pourcentage de performance et distribution des stratégies de réussites



Pour les auteurs, ces résultats peuvent s'expliquer en recourant à la notion de « structure induite » proposée par Bassok et ses collègues. La nature des variables impliquées dans un problème peut favoriser des représentations différentes du problème. Elle semble induire une structure sémantique favorisant un certain schéma lié à une certaine stratégie et masquer l'autre.

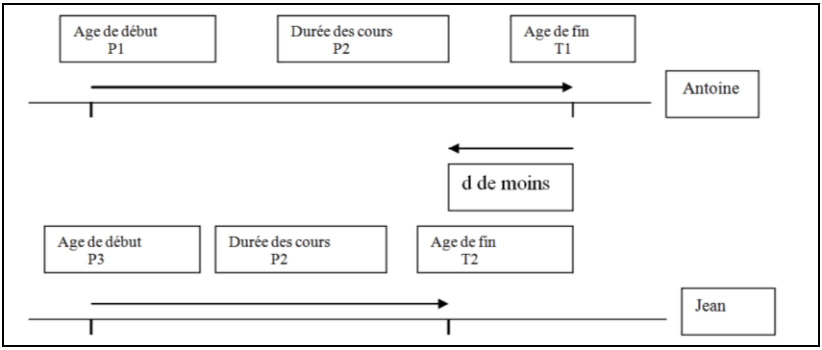
Une variable matérielle induirait une représentation cardinale où les nombres sont des effectifs d'ensemble. Cette représentation rend plus saillantes les relations parties-tout où l'addition est vue comme une réunion des parties dans le tout et la soustraction est vue comme la recherche du complément d'une partie dans un tout. Elle favorise le schéma partie-tout conduisant à la procédure-complément (celle à trois calculs, Figure 2).

Figure 2 : Représentation sous-jacente à la procédure-complément



Une variable temporelle induirait une représentation ordinale où les nombres sont soit des positions sur une ligne numérique avec une origine soit des intervalles entre ces positions. Cette représentation privilégie les relations de similitude et de différence provenant de la mise en correspondance. Elle favorise le schéma de comparaison lié à la procédure-comparaison (celle à un calcul, Figure 3).

Figure 3 : Représentation sous-jacente à la procédure-comparaison



Ces différences procédurales semblent donc être dues à des différences d'attribution de la signification. Les deux exemples de problèmes présentés n'ont pas été identifiés comme faisant partie de la même catégorie.

En résumé, les travaux présentés montrent que la construction de la représentation et le choix de la stratégie mise en œuvre sont liés à un effet sémantique transversal dû à la nature des objets et à leurs propriétés. Autrement dit, certains objets et/ou leurs relations contenus dans l'énoncé conduisent les individus à inférer une certaine représentation de l'énoncé.

Cette représentation - induite par les connaissances sur le monde plus que par des connaissances mathématiques - n'est pas toujours compatible avec la structure mathématique du problème. Elle va néanmoins conditionner la réussite, la mise en œuvre de la stratégie de résolution ainsi que le transfert entre problèmes isomorphes, des problèmes structurellement identiques (Coquin-Viennot & Moreau, 2003 ; Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Thevenot, 2008 ; Vergnaud, 1982).

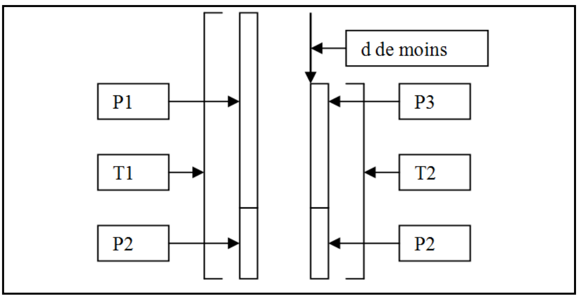
2. Prise en compte des effets de contenu de l'énoncé et démarche d'apprentissage

Du fait de l'influence des effets de contenus sur la réussite et la mise en œuvre de la stratégie de résolution, la question de la prise en compte des effets de contenus en matière d'enseignement se pose : Comment conduire l'apprenant à remettre en cause la représentation spontanée du problème pour construire une représentation plus abstraite de la structure mathématique du problème ?

Du point de vue de l'expert en mathématiques, il existe une représentation plus abstraite, la structure mathématique des problèmes, qui permet d'enrichir le répertoire de stratégies disponibles et d'envisager l'équivalence entre ces différentes stratégies de résolution.

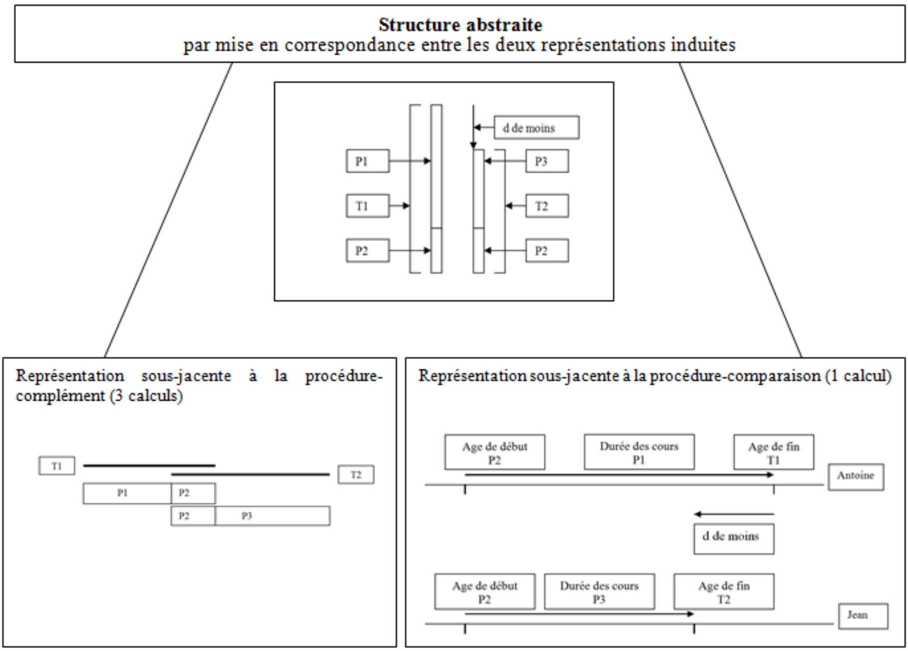
Par exemple pour les problèmes étudiés par Gamo et *al*. (2010), il existe une représentation plus générale fondée sur la structure abstraite mathématique qui inclut les deux représentations (cardinale vs. ordinale, Figures 2 et 3) dans la mesure où elle permet de prendre en compte les deux points de vue en faisant une inférence de comparaison ou une inférence de complément (Figure 4).

Figure 4 : Structure abstraite mathématique du problème



Ainsi, ces problèmes peuvent être catégorisés selon deux niveaux d'abstraction, un niveau inférieur qualifié de moins abstrait et un niveau supérieur qualifié de plus abstrait. Au niveau inférieur, l'élaboration de la représentation est exclusive. Elle est induite par le contenu de l'énoncé ; la nature de la variable impose la mise en œuvre de la stratégie. Une seule des stratégies est perçue, l'autre est inhibée. Au niveau supérieur, l'élaboration de la représentation est inclusive. Elle est fondée sur la structure abstraite mathématique du problème ; les deux stratégies sont perçues (Figure 5).

Figure 5 : Catégorisation des problèmes étudiés par Gamo et collaborateurs selon les deux niveaux d'abstraction



Ainsi, des problèmes de même structure peuvent être catégorisés à des niveaux différents et donc interprétés comme radicalement différents et donner lieu à des résolutions différentes (Coquin-Viennot & Moreau, 2003 ; Novick & Bassok, 2005) si les objets qu'ils impliquent ne permettent pas les mêmes interprétations de l'énoncé.

L'hypothèse défendue par Gamo, Sander et Richard (2010) est qu'il est possible d'amener les élèves à recatégoriser les problèmes au niveau d'abstraction supérieur grâce à une démarche d'apprentissage fondée sur l'analogie entre les problèmes et la comparaison entre stratégies.

Pour valider cette hypothèse, Gamo *et al*. (2010) ont conçu une démarche d'apprentissage qui, en conduisant les élèves d'une part à développer leur capacité à changer de point de vue, c'est-à-dire, à développer une flexibilité cognitive plus grande et d'autre part à se représenter les problèmes plus abstraitement , vise à les rendre moins dépendants des effets induits par le contenu sémantique des problèmes.

Cette démarche d'apprentissage consiste à proposer aux élèves de comparer les problèmes autorisant plusieurs stratégies de résolutions et ce, afin de les conduire à dépasser l'appréhension spontanée des situations, et à envisager différents points de vue sur le même problème. Cette démarche vise à adopter un point de vue plus général que celui induit par la nature de la variable en jeu dans l'énoncé du problème. Elle vise à susciter un questionnement sur le point de vue spontanément adopté en résolution de problèmes. Elle doit ainsi conduire les élèves à « dépasser » la structure induite sémantiquement par le contenu de l'énoncé et à prendre un point de vue alternatif permettant d'élaborer une conceptualisation de la structure mathématique. Ce processus, appelé « recodage sémantique », constitue en une représentation plus abstraite du problème permettant de comprendre l'équivalence entre les différentes stratégies de résolution alternatives.

Cette démarche consiste dans un premier temps à favoriser la comparaison entre stratégies admissibles et entre énoncés qui partagent une même structure mathématique mais dont les structures sémantiques diffèrent. Dans un second temps elle consiste à rechercher une représentation commune permettant de justifier la raison pour laquelle les deux stratégies aboutissent au même résultat. Cette comparaison est induite par les tâches, les consignes proposées par l'enseignant (comparaison des stratégies, comparaison des problèmes, mise en évidence de la partie commune dans tous les problèmes), et le choix des problèmes proposés successivement. L'enseignant alterne les phases de recherche individuelle et de co-construction collective durant lesquelles il amène les élèves à décrire la structure du problème et les relations au sein du problème.

Afin de mettre en évidence l'efficacité de cette démarche par recodage sémantique, deux expériences suivant un protocole de type pré-test post-test ont été réalisées. Une première expérience a été conduite en classe ordinaire (Gamo et *al.,* 2010), une seconde expérience a été réalisée en réseau d'éducation prioritaire (REP) (Gamo et *al.,* 2014).

3. Description et analyse comparative des expériences

3.1. Méthodologie

L'expérience s'est déroulée en trois phases (pré-test, apprentissage, post-test). Deux séances d'apprentissage de 60 minutes chacune ont été dispensées au groupe expérimental (Ge). Le groupe contrôle (Gc) n'a passé que le pré-test et le post-test, ces derniers étant identiques et communs à l'ensemble des participants.

3.1.1. Participants

L'expérimentation a été réalisée auprès de différents publics scolaires, dans des classes de Cours Moyens 1re et 2e année (Grade 4 et Grade 5) de la région parisienne. La première expérience a été réalisée dans 11 classes de six écoles élémentaires « ordinaires » de l'académie de Créteil.

La seconde expérience a eu lieu dans 5 classes de deux écoles élémentaires de la même commune, intégrées toutes deux à un REP dans l'académie de Créteil. Dans ces écoles, environ 80% des familles appartiennent à des catégories socio-professionnelles défavorisées, beaucoup sont au chômage, et une proportion importante de familles est non francophone. D'après les résultats des évaluations nationales, plus de deux tiers des élèves ont des taux de réussite inférieurs à 50% pour les épreuves de mathématiques, et seuls 3% des élèves de CM2 ont des performances supérieures à 66%. La répartition des participants est présentée dans le tableau ci-dessous :

		Exp 1	Exp 2
Ge	Effectif Filles Garçons Etendue Moyenne Ecart-type	67 (3 CM1 : grade 4) et 126 (5 CM2 : grade 5) 98 95 8 ans 9 mois – 12 ans 10 ans 3 mois 9 mois	68 (3 CM2 : grade 5) 30 38 9 ans 8 mois – 12 ans 10 ans 5 mois 6 mois
Gc	Effectif Filles Garçons Etendue Moyenne Ecart-type	55 (3 CM2 : grade 5) 26 29 9 ans 10 mois – 12 ans 10 ans 5 mois 9 mois	39 (2 CM2 : grade 5) 16 23 10 ans 1 mois – 12 ans 3 mois 10 ans 11 mois 7 mois

3.1.2. Matériel

Le matériel a été construit en faisant varier le facteur Variable impliquée dans l'énoncé des problèmes : la variable matérielle (Effectif, Prix) et la variable temporelle (Âge). Chaque problème a été conçu en deux versions, une dans laquelle l'objet est de calculer une partie et l'autre un tout (Tableau 2). Ces problèmes sont les mêmes dans le pré-test et le post-test (même formulation et même valeur numérique).

Dans le pré-test et le post-test, les élèves ont 8 problèmes à résoudre, 6 problèmes expérimentaux (Tableau 2) et 2 problèmes distracteurs (Tableau 4). L'ordre de passation a été contrôlé par la constitution de 12 livrets différents afin de minimiser les effets de transfert dus aux proximités sémantiques et structurelles entre les problèmes. Les livrets sont répartis aléatoirement entre les élèves, de sorte que les facteurs secondaires (ordre de passation des problèmes et travail individuel) sont contrôlés à l'intérieur de chaque classe.

Lors de l'apprentissage, les deux problèmes d'effectifs du pré-test sont utilisés ainsi que cinq autres problèmes isomorphes (Tableau 3).

Le tableau 2 présente les énoncés des problèmes expérimentaux, le tableau 3, les énoncés des problèmes à résoudre pendant la phase d'apprentissage et le tableau 4, les énoncés des problèmes distracteurs du pré-test et du post test. Les problèmes expérimentaux et ceux de la phase d'apprentissage sont des problèmes de même structure mathématique, ils comportent tous une partie commune. Dans la version élève, la partie commune n'était pas écrite en gras. En revanche, elle l'est dans cet article afin de la mettre en relief dans chaque problème où cette notion intervient.

Tableau 2 : Problèmes expérimentaux

Partie	Tout
Effectif Dans la famille Bernard, il y a 6 personnes. Quand les Bernard vont avec **les Durand** à la pizzeria, ils sont 9 à table. Quand **les Durand** vont avec les Rousseau à la pizzeria, ils sont 2 de moins à table. Combien sont-ils dans la famille Rousseau ?	Dans la famille Richard, il y a 5 personnes. Quand les Richard partent en vacances avec **les Robert**, ils sont 9 à l'hôtel. Dans la famille Dumas, il y a 3 personnes de moins que dans la famille Richard. **Les Robert** partent en vacances avec les Dumas. Combien seront-ils à l'hôtel ?
Prix Daniel achète à la librairie un cahier qui coûte 7 euros et **une règle**. Il paie 11 euros. Clément achète **une règle** et un feutre. Il paie 2 euros de moins Daniel. Combien coûte le feutre ?	Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 euros et **des ciseaux**. Il paie 14 euros. Un feutre coûte 3 euros de moins qu'un classeur. Augustin achète **des ciseaux** et un feutre. Combien doit-il payer ?
Âge Pauline a suivi les cours de danse au conservatoire pendant 11 ans et s'est arrêté à 17 ans. Julie a commencé **au même âge** que Pauline et s'est arrêtée 4 ans plus tôt. Combien de temps Julie a-t-elle suivi les cours?	Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans. Jean a commencé **au même âge** qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins. A quel âge Jean s'est-il arrêté ?

Tableau 3 : Problèmes de la séquence d'apprentissage

Séance 1

Effectif (Partie)	**Effectifs (Tout)**
Dans la basse-cour, il y a 224 poules. Quand les poules sont avec **les canards**, il y a 512 animaux. Finalement, le fermier met des oies à la place des poules, cela fait 5 animaux de moins dans la basse-cour. Combien y a-t-il d'oies ?	Dans un élevage, il y a 304 moutons. Quand les moutons sont avec **les vaches**, il y a 632 animaux. Il y a 3 chevaux de moins que de moutons. Finalement, l'éleveur met des chevaux à la place des moutons. Combien y a-t-il d'animaux dans l'élevage?

Séance 2

Hauteur (Partie)	**Hauteur (Partie)**	**Effectifs (Partie)**
Une brique orange mesure 8cm. Cette brique orange est posée sur une **brique blanche**. La pile ainsi formée mesure 15cm de hauteur. Une brique rouge est posée à la place de la brique orange. La nouvelle pile mesure 5cm de moins. Quelle est la hauteur de la brique rouge ?	Julien mesure 129cm. Quand Julien monte sur **des échasses**, il mesure alors 231 cm. Quand son frère Cyril monte sur les **mêmes échasses**, il mesure 5 cm de moins. Combien mesure Cyril ?	Les supporters Anglais sont 354. Quand les **supporters Français** partent avec les Anglais, ils sont 617 dans l'avion. Finalement les Espagnol partent à la place des Anglais, ils sont 4 de moins dans l'avion. Combien y a-t-il de supporters Espagnol ?

Tableau 4 : Problèmes distracteurs

Problème 1 :	**Problème 2 :**
Un enfant compte son argent de poche. Il a 22 billets de 10 Euros, 4 pièces de 2 Euros et 7 Pièces de 1 Euro. Combien de billets de 5 Euros lui donnera-t-on en échange de tout cet argent?	Pour la kermesse, on fait des sachets de bonbons. Dans chaque sachet, on met 15 bonbons. On a fait 200 sachets et il reste 12 bonbons. Combien avait-on de bonbons ?

3.2. Procédure

3.2.1. Prétest

La passation des problèmes s'est déroulée durant une séance de 45 minutes. L'enseignant présente le livret distribué aux élèves puis leur demande de résoudre ces problèmes en notant sur la feuille tous les calculs effectués pour trouver la solution des problèmes.

3.2.2. Phase d'apprentissage

L'apprentissage s'est déroulé sur deux jours consécutifs (deux séances de 60 minutes chacune).

Séance 1 : Mettre en évidence les deux stratégies admissibles

Quatre problèmes d'effectifs sont travaillés. L'enseignant commence la séance en faisant référence aux problèmes résolus dans les livrets, présente l'énoncé du premier problème, résolu lors du pré-test (question portant sur la partie), ainsi que les deux stratégies de résolution (Stratégie 1 : procédure-complément; Stratégie 2 : procédure-comparaison). Puis il incite à analyser ces stratégies (« *Quand j'ai corrigé les problèmes, je me suis aperçu que vous ne faisiez pas tous pareil et que vous trouviez quand même la bonne réponse*. *Voici les deux solutions : comment expliquez-vous que l'on trouve le même résultat ? »)*. Après une phase de recherche individuelle, une discussion collective est introduite à travers différentes questions: « *Qui peut expliquer pourquoi on trouve le même résultat ?* »« *Que pensez-vous des deux stratégies ?* ». Ensuite, l'enseignant affiche un autre problème isomorphe (variable « effectif », question portant la partie, Tableau 2). Après la lecture de l'énoncé, l'enseignant demande de résoudre le problème en utilisant 2 stratégies. Après cette phase de recherche individuelle, les 2 stratégies de résolution sont affichées au tableau, décrites avec la participation active des élèves, puis comparées (« *D'après vous, quelle est la meilleure ?* », « *Quelle est la stratégie qui vous paraît maintenant la plus « pratique et simple » ?* » « *Comment ça se fait qu'on peut faire la deuxième méthode ?* »). Puis l'enseignant les incite à comparer les différents problèmes : « *Y a-t-il quelque chose dans ce problème comme le premier problème* »... L'objectif de ces échanges entre pairs et avec l'enseignant est de faire émerger la notion de partie commune. Si besoin, l'enseignant fait constater l'existence de cette partie commune dans chaque problème : **«** *Dans l'autre problème, quelle est la partie qui ne bouge pas ? ».*

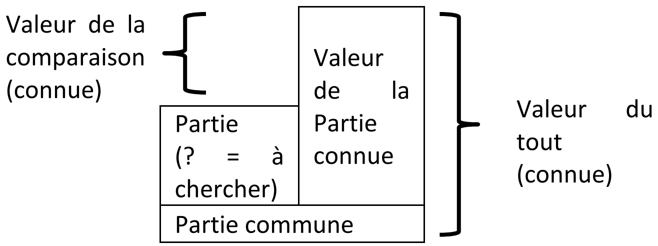
La même démarche utilisée pour les 2 premiers problèmes est ensuite utilisée pour les 2 problèmes suivants (Tableau 3).

À la fin de la séance, un bilan est proposé : l'enseignant reprend la notion de partie commune qu'il met en relation avec l'emploi de la procédure-comparaison, et met en évidence l'efficacité de cette stratégie c'est-à-dire son caractère économique puisque cette dernière ne requiert qu'un seul calcul.

Séance 2 : Dégager l'aspect formel de la situation

Après avoir fait rappeler aux élèves ce qui a été vu la veille, les élèves commencent par simuler le premier problème présenté avant de le schématiser. Le professeur présente un nouveau problème (variable « hauteur » ; Tableau 3 : séance 2) puis montre trois boîtes de même couleur que les briques décrites dans l'énoncé et demande à trois élèves de venir mimer le problème devant la classe. Ensuite, afin que chacun puisse à son tour manipuler, il distribue à chaque élève une enveloppe contenant des rectangles de couleur représentant en 2 dimensions les briques décrites dans l'énoncé. L'enseignant amène ensuite les élèves à réaliser un schéma représentant l'énoncé du problème, puis leur demande de le résoudre en l'utilisant. A l'issue de ce travail individuel, le professeur s'appuie sur les schémas réalisés par les élèves pour leur proposer la représentation schématique suivante (Figure 6).

Figure 6 : La représentation schématique proposée par le professeur



Puis il présente les différentes stratégies et les fait comparer par les élèves (« Quelle est la solution qui vous paraît maintenant la plus « pratique et simple » ? », Pourquoi la stratégie 2 vous semble intéressante? »). Puis en pointant la représentation schématique, il explique le rôle de la partie commune dans la procédure-comparaison.

Ensuite, les élèves doivent successivement résoudre deux autres problèmes isomorphes (Tableau 3 : séance 2) en réalisant un schéma complété par les données. Lors de la correction, le professeur fait remarquer qu'il y a encore deux stratégies de résolution, insiste sur l'utilité de la représentation schématique, et fait de nouveau comparer les stratégies. À la fin de la séance, le professeur passe en revue brièvement chaque problème en demandant aux élèves quelle partie est la partie commune. Puis il institutionnalise «*Nous avons constaté que les problèmes étudiés peuvent se résoudre de deux façons. Nous avons aussi remarqué que dans chaque problème il y a une partie commune. Comme dans chaque problème, les 2 ensembles ont une partie commune, dans la 2^{e} procédure, il n'y a pas besoin de faire tous les* *calculs puisque la différence se porte sur les parties qui ne sont pas communes ».*

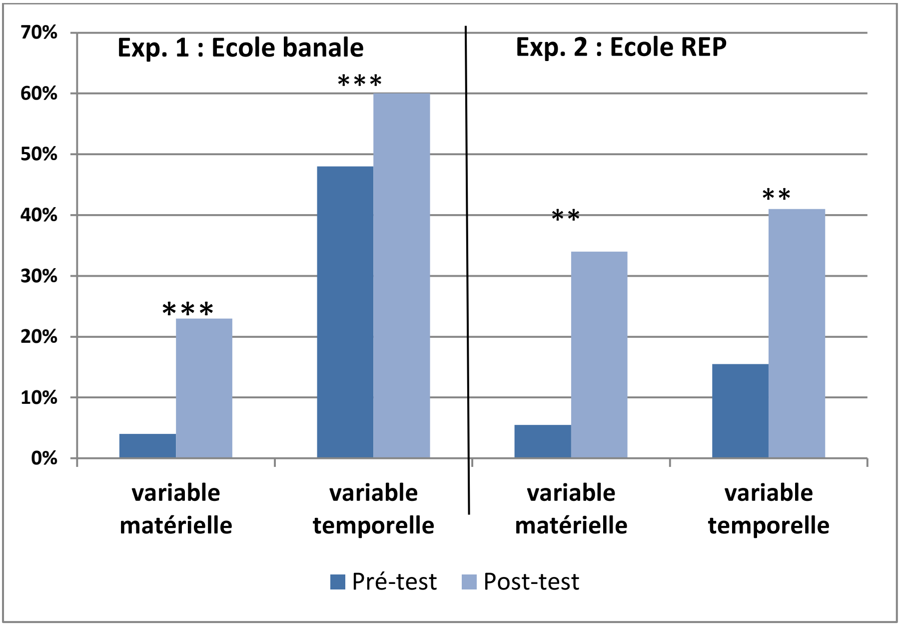
3.2.3. Post-test

Le post-test, identique au pré-test, s'est déroulé le lendemain de la séquence d'apprentissage.

4. Résultats

Pour les deux publics scolaires étudiés, les résultats comparatifs de Gamo *et al.* (2010) et Gamo *et al.* (2014) montrent un très faible niveau d'utilisation de la procédure-comparaison avant apprentissage pour les variables matérielles (Fréquence : 4 à 5 %) et une augmentation significative après apprentissage (Fréquence : 23% à 34%, $p < .01$), pour les problèmes déjà vus pendant l'entraînement comme pour des problèmes nouveaux (Figure 7). L'interaction entre les facteurs Groupe et Moment du test est significative aussi bien pour les élèves scolarisés en classes ordinaires ($F(1, 259) = 18.62$; $p <.001$, pour les détails se référer à Gamo *et al*., 2010) que pour ceux scolarisés en REP (Gamo *et al*., 2014). En revanche, pour les élèves scolarisés en classes ordinaires ou en REP qui n'ont pas suivi la phase d'apprentissage, aucune différence significative entre les deux moments du test n'est observé ($F(1, 67) = 3.23$; $p =.08$, pour les détails se référer à Gamo *et al*., 2010 et Gamo *et al*., 2014).

Figure 7 : Fréquence d'utilisation de la procédure-comparaison[1]



La démarche d'apprentissage a permis atteindre ses objectifs : les élèves, quels que soient leur niveau et leur environnement scolaire, ont mis davantage en œuvre la procédure-comparaison présentée comme étant la stratégie alternative dans des situations pour lesquelles la représentation mentale spontanée n'était pas congruente avec celle-ci (variable matérielle) et dans des situations pour lesquelles la représentation était congruente (variable temporelle). Cette stratégie alternative a donc été transférée vers d'autres problèmes isomorphes. On peut donc en conclure qu'un transfert a bien eu lieu après seulement deux séances d'apprentissage et que dans ce sens, la démarche d'apprentissage a atteint l'objectif visé : induire une

[1] Deux astérisques (**) indiquent une signification statistique au niveau de 5 %, et trois astérisques (***) au niveau de 1 %.

représentation cardinale favorisant un schéma partie-tout ou une représentation ordinale favorisant un schéma de comparaison, que les problèmes contiennent ou non la même variable que celle utilisée dans la phase d'apprentissage (Figure 7).

5. Discussion – Conclusion

L'objectif de cet article visait à comparer l'effet auprès d'élèves scolarisés en classes ordinaires et en REP d'une démarche d'apprentissage par recodage sémantique portant sur la résolution de problèmes arithmétiques admettant plusieurs stratégies de résolution. Cette démarche est fondée sur une comparaison de stratégies et sur une comparaison entre problèmes qui partagent une même structure mathématique, cette seconde comparaison permettant de mettre en évidence une analogie entre les énoncés des problèmes étudiés. Ces comparaisons visent à conduire à la découverte d'un alignement structurel entre représentations comparées qui permet de catégoriser la structure du problème à un niveau plus général, d'en avoir une représentation conceptuelle plus élaborée. Concevoir une telle conceptualisation de la structure du problème permet aux élèves de développer des points de vue alternatifs c'est-à-dire de la flexibilité cognitive en matière de stratégies de résolution de problèmes. Ils peuvent ainsi choisir de mettre en œuvre une stratégie admissible de résolution plutôt qu'une autre.

D'après les résultats comparatifs obtenus, l'efficacité d'une telle démarche sur l'utilisation de la stratégie alternative observée chez les élèves de classes ordinaires l'est également chez les élèves scolarisés en REP. Celle-ci conduit les élèves à utiliser la procédure-comparaison significativement plus souvent que les élèves du groupe contrôle, quelle que soit la variable présentée dans les problèmes à résoudre. La mise en œuvre de cette stratégie a augmenté après apprentissage dans des situations pour lesquelles la représentation mentale spontanée n'était pas congruente avec celle-ci et également dans des situations pour lesquelles elle l'était et ce non seulement pour les problèmes traités pendant l'apprentissage mais également pour d'autres problèmes isomorphes. Ces résultats montrent qu'apprendre à catégoriser au niveau supérieur d'abstraction correspondant à la structure mathématique conduit à en construire sa représentation et surtout qu'il est possible de faire acquérir le niveau de représentation relativement à la structure mathématique de résolution, en prenant en compte les relations entre première représentation particularisée, celle amorcée par le contenu de l'énoncé, et représentation d'un niveau plus général, celle de la structure mathématique.

La démarche d'apprentissage est efficace au sens où elle a conduit une part importante des élèves scolarisés en classes ordinaires ou en REP à remettre en cause leurs connaissances initiales, renforcées par les effets de contenu de l'énoncé, et à en acquérir d'autres permettant de changer de point de vue sur le problème. Cette pratique enseignante a rendu des élèves de 9-11 ans capables de faire preuve de flexibilité cognitive, en d'autres termes d'abstraire et de comprendre que les stratégies sont équivalentes, puis de mettre en œuvre de façon délibérée celle qui était la plus économique sur le plan procédural. Elle a enrichit le registre de stratégies à disposition des élèves. Le recodage sémantique a rendu plus saillantes les similitudes structurelles entre les problèmes. Il a favorisé le transfert de stratégies entre problèmes isomorphes de structures sémantiques différentes. L'abstraction par recodage sémantique joue donc un rôle déterminant dans la résolution de problème et le transfert d'apprentissage.

Toutefois, nous ne pouvons pas affirmer que cet apprentissage permet à tous les élèves de comprendre à l'issue de la phase d'apprentissage les subtilités d'un concept qui restent difficile à percevoir même pour de nombreux adultes. Des séances d'entraînement et d'application sont sans doute nécessaires à certains élèves pour en construire la conceptualisation nécessaire.

Ces résultats ont des implications directes dans le cadre scolaire.

Reconnaître l'importance des connaissances que les individus possèdent sur la nature des objets et de leurs relations dans la construction de la représentation du problème pourrait avoir des applications pédagogiques fructueuses.

Notamment, cela permettrait d'élargir le répertoire de stratégies disponibles pour des problèmes de même structure mathématique. En effet, la stratégie mise en œuvre étant souvent induite par le contenu de l'énoncé du problème, elle ne reflète pas nécessairement la construction par l'élève d'une représentation de la structure mathématique du problème. C'est ce que montrent les problèmes expérimentaux de Gamo *et al*. (2010, 2011), si l'élève résout les problèmes portant sur des variables temporelles avec la procédure-comparaison, stratégie la plus économique au niveau procédural, dans le sens où elle ne demande qu'une seule étape de résolution mais résout des problèmes portant sur d'autres variables avec la procédure-complément, stratégie à plusieurs étapes, malgré l'emploi de la stratégie la plus économique dans les premiers types de problème, on peut penser qu'il n'a probablement pas atteint le niveau supérieur d'abstraction qui lui permettrait de saisir l'équivalence entre ces problèmes. Il s'en suit qu'il est particulièrement intéressant de travailler sur la construction d'une représentation plus abstraite du problème permettant d'envisager toutes les stratégies admissibles et ceci afin d'enrichir le registre de stratégies disponibles des enfants. C'est tout l'intérêt et l'enjeu de la démarche d'apprentissage proposée (Gamo *et al.*, 2010) dont l'enjeu est d'amener l'apprenant à reconnaître que différentes représentations d'un problème peuvent être construites et qu'elles sont équivalentes, c'est-à-dire de le conduire à développer sa flexibilité cognitive, sa capacité à changer de point de vue sur les problèmes qui lui sont proposés.

Par ailleurs, en terme d'évaluation, la stratégie spontanément mise en œuvre ne permet pas de diagnostiquer à quel niveau d'abstraction s'est construite la représentation mentale du problème. En effet, en résolution de problèmes mathématiques, si l'élève change de stratégies en fonction des éléments du contexte de l'énoncé, cela peut traduire que – soit cet élève a analysé le problème à son niveau de catégorisation le plus abstrait puis a choisi une stratégie en fonction de ses propres critères (exemples : effectuer les calculs au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé, choisir une stratégie économique pour éviter les erreurs avec l'idée sous-jacente que moins on fait de calculs moins on a de chance de se tromper, utiliser une stratégie estimée élégante…), - soit ce dernier a un niveau de conceptualisation du problème assez faible, de son point de vue les problèmes n'ont pas la même structure.

Porter son attention sur le niveau de catégorisation induit par les éléments des énoncés peut permettre d'évaluer à quel niveau d'abstraction s'est construite la représentation mentale du problème d'un élève. Cette évaluation pourrait avoir des retombées très intéressantes. L'évaluation des acquisitions conceptuelles devrait prendre en compte de tels effets de contenu de l'énoncé pour ne pas se méprendre sur le niveau conceptuel atteint par l'élève. Il s'agit par exemple, de ne pas confronter les élèves qu'à des problèmes menant à un alignement entre la structure de l'opération et la structure de la relation liant les objets.

En effet, comme les résultats des recherches de Gamo *et al*. (2010, 2011) le montrent, l’utilisation systématique de structures sémantiques permettant d’accéder facilement à la structure mathématique dans la pratique pédagogique ne permet pas de distinguer les réussites reflétant des compétences acquises par l’élève de celles qui ne sont que la conséquence d’un habillage compatible avec la structure mathématique (Figure 1). .Les différences de performances observées entre des problèmes de même structure ne différant que par les objets utilisés dans l’énoncé sont une illustration claire de ce phénomène. Pour pouvoir juger du niveau d’abstraction de l’élève, l’habillage d’un problème ne doit pas fournir une structure sémantique qui supporte les inférences à mettre en œuvre pour réussir le problème. Ces inférences doivent être supportées par la structure mathématique du problème, l’enseignant peut alors être sûr que la notion visée est effectivement acquise par l’élève. Un habile croisement entre différents habillages et une même structure mathématique est donc nécessaire pour s’assurer d’un haut niveau d’abstraction.

La démarche d’apprentissage proposée peut être mise en œuvre efficacement dans différents environnements scolaires. Son efficacité a été démontrée auprès d’élèves scolarisés en éducation prioritaire, élèves dont le niveau scolaire est souvent plus faible que dans d’autres écoles et dont le rapport au savoir est différent.

En conséquence, les démarches d’apprentissage favorisant la prise en compte des effets de contenu de l’énoncé permettraient aux enseignants d’évaluer le niveau d’abstraction réellement atteint par leurs élèves et leur offriraient un moyen de guider le développement cognitif des élèves qui en ont besoin vers l’abstraction.

Références bibliographiques

Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, *35*(2), 99-134. doi:10.1006/cogp.1998.0675

Bassok, M., & Olseth, K. L. (1995). Object-based representations: Transfer between cases of continuous and discrete models of change. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *21*(6), 1522-1538. doi:10.1037/0278-7393.21.6.1522

Bautier, E., & Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie, 148*, 89-100.

Coquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2003). Highlighting the Role of Episodic Model in the Solving of Arithmetical Problems. *European Journal of Psychology and Education, 18* (3), 267-279.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française,* doi:10.1016/j.

Gamo, S., Taabane, L., & Sander, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année Psychologique, 111,* 613-640.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving**.** *Learning and Instruction, 20*, 400-410.

Hakem, H., Sander, E., Labat, J-M, & Richard, J-F. (2005). DIANE, *a diagnosis system for arithmetical problem solving*. In C.-K. Looi, G. McCalla, B. Bredeweg, & J. Breuker (Eds.), Supporting Learning through Intelligent and Socially Informed Technology. *Frontiers in Artificial Intelligence and applications.* The Netherlands, IOS Press, (pp. 628-635).

Kherroubi, M., & Rocheix, J.Y. (2004). La recherche en éducation et les ZEP en France. Apprentissages et exercice professionnel en ZEP : résultats, analyses, interprétations. *Revue française de pédagogie, 146*, 115-190.

Martin, S. A., & Bassok, M. (2005). Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word-problem solving and equation construction tasks. *Memory & Cognition*, *33*(3), 471-478.

Novick, L.R., & Bassok, M. (2005). Problem solving. In K. J. Holyoak and R. G. Morrison (Ed.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 321-349). New York: Cambridge University Press.

Richard, J.-F., & Sander, E. (2000). Activités d'interprétation et de recherche de solution dans la résolution de problèmes. In J-N. Foulin & C. Ponce (Eds.), *Lire, écrire, compter, apprendre : Les apports de la psychologie des apprentissages* (pp. 91-102). Bordeaux : Editions du CRDP.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic.

Thevenot, C., & Oakhill, J. (2008). A generalization of the representational change theory from insight to non-insight problems: The case of arithmetic word problems. *Acta Psychologica*, *129*(3), 315-324.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.